

***МАТЕМАТИЧЕСКАТА
ГРАМОТНОСТ В PISA
И ОБУЧИТЕЛНИТЕ ПРАКТИКИ В
БЪЛГАРСКИТЕ УЧИЛИЩА***



PISA и OECD/PISA са търговски марки на Организацията за икономическо сътрудничество и развитие.

Констатациите, тълкуванията и изводите в документа изразяват позицията на авторите и не могат да се приемат като официално становище на Консорциума на PISA.

Програмата за международно оценяване на учениците (PISA) на ОИСР вече е добре позната и в нашата страна. Тя се провежда от 2000 г. през тригодишни периоди, като изследва грамотността на учениците в три области: четене, математика и природни науки. Всеки отделен етап на програмата оценява грамотността на учениците и в трите области, но върху една от тях се поставя специален акцент. Например PISA 2000 оценява основно четивната грамотност на учениците, PISA 2003 – математическата грамотност, PISA 2006 – природонаучната грамотност, а PISA 2009 отново връща акцента върху четивната грамотност.

Български ученици са участвали досега в три етапа на програмата: през 2000, 2006 и 2009 г. В момента ЦКОКУО подготвя поредния етап, PISA 2012, с фокус върху математическата грамотност на учениците.

PISA е пример за оценяване на компетентностите на учениците чрез обща международна рамка. Изследването няма за цел да определи дали учениците в една държава постигат националните стандарти в областта на четивната грамотност, математиката или природните науки. То се стреми да определи доколко учениците в края на задължителното училищно образование са формирали знанията, уменията, ценностите и нагласите, смятани като определящи за тяхната успешна реализация.

Резултатите на нашите ученици в PISA 2000, 2006 и 2009 показаха, че българското училище все още не допринася в достатъчна степен за формиране на умения за справяне с проблеми, произтичащи от реалния живот; не подготвя достатъчно добре учениците, за да се реализират в конкурентна среда, за да продължат обучението си и да се интегрират успешно в обществото.

PISA не е изпит, за който можем да се подготвим в продължение на няколко месеца. Резултатите на българските ученици в PISA ще се повишат, само ако се повиши ефективността на образователната система. Това означава, че е необходимо да преосмислим философията на българското училищно образование и то да формира у учениците не просто знания и умения, а компетентности.

Ние разбираме колко важна е ролята на образователните експерти и на учителите за успешното осъществяване на тази цел. Поради това подготвихме сборник с материали, който от една страна представя концепцията на PISA за математическата грамотност и как тя се измерва, а от друга, какви обучителни практики се прилагат в българското училище. Нашата цел е да популяризираме едно от най-престижните международни проучвания на качеството на образованието, каквото е PISA. Същевременно ние се стремим да покажем как методиката и задачите на PISA могат успешно да се използват в клас от учителите и учениците.

Първата част на сборника съдържа описание на формата и рамката на теста по математика, който ще бъде използван в PISA 2012. Най-общо е представена концепцията на PISA за математическата грамотност. Описани са също така основните елементи на инструментариума на изследването, целевата група и извадката. Представена е подробна информация как се подготвя и провежда изследването в училищата.

Втората част се състои от задачи по математика, които са били използвани при подготовката и провеждането на предишни етапи на PISA. Освен съдържанието на всеки въпрос, публикуваме подробни критерии за оценяване на отговорите на учениците, както и автентични отговори на ученици, участвали в изследванията на PISA (при въпросите със свободен отговор). След всеки въпрос е предоставена информация за измерваната компетентност, както и неговата трудност в точки според обобщената скала по математика. Въпросите към задачите „Резервоар за вода” и „Концентрация на лекарство” са от „The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills“ и не са били включени в тестовете на PISA, поради което няма данни за тяхната трудност.

В третата част са разгледани някои аспекти на практиките за обучение и оценяване на математически компетентности у нас. Дадени са примери за интерпретиране и са представени резултати от проведени през 2011 година изследвания в тази насока. В методическите коментари към задачите от PISA са описани дейностите (процедурите), които водят до правилния отговор. Представени са възможности за развитие на конкретна ситуация.

СЪДЪРЖАНИЕ

Математическата грамотност на учениците и оценяването PISA	7
<i>Концептуална рамка и формат на теста по математика в PISA 2012</i>	7
<i>Знания и умения по математика, които притежават учениците с резултат на съответните равнища от обобщената скала</i>	9
<i>Инструментариум и процедури</i>	11
<i>Целева група на PISA и извадка</i>	11
<i>Как се провежда оценяването PISA в училищата?</i>	12
<i>Какво следва?</i>	13
Примерни задачи по математика, използвани в PISA	15
<i>Ферми</i>	15
<i>Ябълкови дръвчета</i>	17
<i>Кубове</i>	21
<i>Измерване на площ на континент</i>	22
<i>Израстване</i>	24
<i>Скорост на състезателен автомобил</i>	27
<i>Обири</i>	29
<i>Триъгълници</i>	31
<i>Резервоар за вода</i>	32
<i>Концентрация на лекарство</i>	33
<i>Дърводелец</i>	36
Обучителни практики в българското училище	37
<i>Примери от практиките за обучение и оценяване</i>	38
<i>Методически коментар върху задачи от PISA</i>	42

МАТЕМАТИЧЕСКАТА ГРАМОТНОСТ НА УЧЕНИЦИТЕ И ОЦЕНЯВАНЕТО PISA

Концептуална рамка и формат на теста по математика в PISA 2012

Основен елемент в концепцията на PISA е разбирането за *грамотността* като способността на учениците да използват и прилагат знания, умения и опит, придобити в училище, в ситуации от реалния живот. В частност *математическата грамотност* се дефинира като способността на учениците да определят и разбират ролята на математиката в съвременния свят, да формулират аргументирани твърдения и да използват математическо познание по начин, който отговаря на потребностите на активната и търсеца личност. Тя включва математическо мислене и използване на математически концепции, процедури, факти и средства за описване, обясняване и изказване на хипотези за процеси и явления. С други думи, в областта на математиката PISA оценява уменията на учениците да **формулират, използват и тълкуват** математически проблеми в многообразие от ситуации.

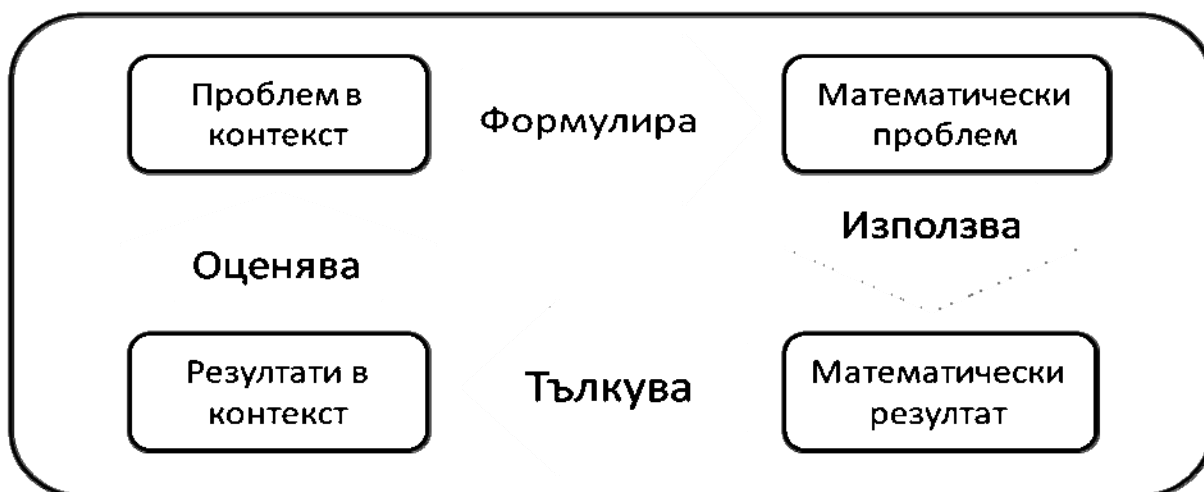
Грамотността по математика се оценява в контекста на:

- математическото съдържание:

Обособени са четири съдържателни области: *количества* (числа и използване на числата за представяне на количествени характеристики и отношения между реални обекти); *пространство и форми* (разпознаване на фигури в различни конфигурации и с различни размери; търсене на сходства и различия при анализа на фигури и техните елементи; познаване на свойствата на обекти и тяхното взаимно разположение); *функции и отношения* (математическо описание на различни процеси); *вероятности и данни* (работа с данни, графично представяне и интерпретиране).

- математическите компетентности: *възпроизвеждане* (извършване на елементарни математически операции); *определяне на логически зависимости* (обобщаване на идеи за решаване на проблем); *осмисляне* (демонстриране на математическо мислене и разсъждаване);
- измерваните познавателни процеси: *формулира, използва, тълкува*.

Графиката представя елементите на математическата грамотност според PISA.



Така описаната концептуална рамка за оценяване на математическата грамотност в PISA е обобщена в таблицата:

	Математическа грамотност
Определение и отличителни характеристики	Математическата грамотност е способността на ученика да формулира, използва и тълкува математическо познание в многообразие от ситуации. Тя включва математическо мислене и използване на математически концепции, процедури, факти и средства за описване, обясняване и изказване на хипотези за процеси и явления. Позволява на ученика да осмисли ролята на математиката в съвременния свят, да формулира аргументирани твърдения и да използва математическо познание по начин, който отговаря на потребностите на съвременния конструктивен и активен гражданин.
Съдържание	Съдържателни области и концепции: • Количества • Пространство и форми • Функции и отношения • Вероятности и данни.
Компетентности	Компетентностите се измерват чрез необходимите математически умения: • Възпроизвеждане • Определяне на логически зависимости • Осмисляне.
Познавателни процеси	• Формулира • Използва • Тълкува.
Контекст	Областите на приложение на математиката, като се акцентира върху използването ѝ в следните аспекти: • Индивидуален • Образователен и професионален • Обществен • Научен.

Грамотността по математика е акцент във втория етап от програмата – PISA 2003, в който България не участва. Тогава резултатите на учениците по математика са представени в шестстепенна скала със средна стойност 500 точки и стандартно отклонение 100 т. Тази скала се използва във всички следващи етапи на изследването. Това позволява постиженията на учениците да бъдат сравнявани и да се анализират тенденциите и промените през определени периоди от време.

Задачите, които съответстват на най-високите равнища на скалата, обикновено включват няколко различни елемента и изискват задълбочена интерпретация. Като правило, описаната ситуация е непозната и е необходимо внимателно осмисляне и творчество. Най-трудните задачи изискват от учениците да тълкуват сложни и непознати данни; да обяснят с езика на математиката комплексна ситуация от реалния живот; самостоятелно да съставят математически модел на описана ситуация, да се аргументират и да предлагат конкретно решение. Въпросите често се състоят от няколко елемента; ученикът трябва да ги свърже и да определи подхода за решаване на задачата, който обикновено се състои от няколко взаимосвързани действия.

Умерено трудните задачи, които съответстват на трето и четвърто равнище от скалата, са свързани с осмислянето и тълкуването на ситуации, които са относително непознати за учениците и поради това неотработени в училище. Често от тях се очаква да пресъздадат конкретна ситуация с формалния език на математиката, за да я осмислят

и анализират. В общия случай това включва поредица от изчисления, както и тяхното осмисляне. Някои от задачите в тази група може да изискват от учениците да представят по подходящ начин решението си чрез кратко обяснение. Сред най-типичните дейности са: тълкуване на свързани графики; тълкуване на текст, който е свързан с информация в таблица или графика; извличане на необходима информация и извършване на изчисления; използване на мащаб за изчисляване на действително разстояние по карта или схема, както и използване на пространствено мислене и познания по геометрия за определяне на разстояние, скорост и време.

Въпросите, определени като най-лесни, са формулирани в относително познат контекст, изискват интерпретация на несложен текст или пряко приложение на широко известно математическо познание. Най-често учениците трябва да разчитат графика и таблица, да извършват несложни изчисления, да подреждат и комбинират данни според посочен критерий и др.

Знания и умения по математика, които притежават учениците с резултат на съответните равнища от обобщената скала

Шесто равнище (над 669.3 точки)

Учениците с резултати на шесто равнище притежават необходимите познания и умения за извършване на сложни математически операции. Те формулират концепции, обобщават и използват информация, като се основават на самостоятелно изследване и моделиране на сложни проблеми ситуации. Свързват и сравняват информация от различни източници, като я осмислят и преобразуват от един вид в друг. Тези ученици успешно изразяват идеите си с формалния език на математиката и разработват подходи и стратегии за решаване на проблеми в непознати ситуации. Детайлно описват и точно представят действията и изводите си, свързани с осъществяването на проучване, аргументиране и др.

Пето равнище (от 607.0 до 669.3 точки)

Учениците с резултат на пето равнище от скалата по математика изработват и използват математически модели в комплексни ситуации, като разбират техните ограничения и определят причините за тях. Избират, сравняват и оценяват стратегии, които са подходящи за решаването на комплексни проблеми, свързани с тези модели. Учениците мислят стратегически, като планират дейностите и задълбочено анализират характеристиките на конкретната ситуация.

Четвърто равнище (от 544.7 до 607.0 точки)

Учениците с резултати на четвърто равнище притежават умения за работа с ясно формулирани математически модели в комплексни ситуации, които може да съдържат ограничения или да изискват правене на предположения. Те избират и комбинират различни начини за представяне на информацията, включително и чрез символи, като ги пренасят върху реални ситуации.

Трето равнище (от 482.4 до 544.7 точки)

Учениците следват ясно описани процедури, включително и такива, които изискват взимане на конкретни решения. Те избират и използват несложни стратегии за решаване на проблем, тълкуват информация от различни източници. Представят по подходящ начин своите резултати и произтичащите от тях изводи.

Второ равнище (от 420.1 до 482.4 точки)

Учениците с резултати на второ равнище тълкуват и разпознават ситуации в

контекст, който изисква да се направи прост извод. Те успешно извличат необходимата информация от конкретен източник и използват несложен модел за нейното представяне. Използват алгоритми, формули и процедури за буквално тълкуване на резултатите.

Второ равнище представлява критичната граница в постиженията на учениците по математика, под която те не показват способности за ефективно използване на математическо познание и справяне с математически проблеми.

Първо равнище (от 357.8 до 420.1 точки) и под първо равнище

Учениците с резултати на първо равнище решават сравнително елементарни математически задачи. Това са задачи, формулирани в познат контекст, като цялата необходима информация е ясно представена в условието на задачата. Притежават умения за извършване на стандартни процедури и следват конкретни указания. Извършват операции и действия, които произтичат непосредствено от условието на задачата.

В момента се подготвя основното изследване на PISA 2012, което отново насочва вниманието към математическата грамотност на учениците. В теста ще бъдат включени задачи, за решаването на които са необходими следните знания и умения:

- Преценява разстояния върху карта при даден мащаб или в квадратна мрежа; идентифицира върху карта с нестандартна ориентация място при зададена съвкупност от параметри; преценява върху карта площ с неправилна форма, като използва даден мащаб.
- Използва питагоровата теорема за намиране на страна на правоъгълен триъгълник и на лице на равнобедрен и равностраничен триъгълник.
- Намира дължина на окръжност и на дъга от окръжност.
- Извършва действия с десетични дроби и оценява резултат със зададена точност.
- Работи с числа и закръглява резултати в порядъка на хиляди, милиони и милиарди.
- Осмисля и решава уравнение в конкретен контекст.
- Моделира с неравенство и избира най-голяма/малка допустима стойност в конкретна ситуация.
- Използва поетапно моделиране.
- Интерпретира и сравнява две времеви графики върху обща координатна система и изчислява периоди от време.
- Интерпретира информация в чертеж или номерологичен (матричен) модел.
- Разчита данни в чертеж или двумерен геометричен модел, намира периметър и лице на фигури.
- Идентифицира и работи с двумерни модели и развивки на куб и паралелепипед.
- Изчислява процент и част от число, представя изменение в проценти.
- Прави просто заключение въз основа на математическо отношение, описано с всекидневен език.
- Изчислява обем и околна повърхнина на тела в контекст.
- Интерпретира кумулативна честота по графика; сравнява средни стойности в даден интервал.
- Открива данни в графика или текст и ги замества в дадена формула, за да изчисли определена стойност.
- Разчита стълбова (стълбчеста) диаграма, сравнява данни от различни диаграми и/или от диаграма и таблица; проследява изменение на величини.

- Анализира твърдения в контекста на данни от текст, графика, таблица и др.
- Интерпретира графика във връзка с данни в таблица и обратно.
- Тълкува реална ситуация (описана в условието на задачата) и избира подходящ математически модел за решаване на задачата.
- Изчислява пропорции и пресмята неизвестна величина в тях.
- Определя изгодност на избор или полезна стратегия по един или няколко критерия и прави обосновка с думи или изчисления.
- И др.

Инструментариум и процедури

Подобно на всички предишни оценявания на програмата, PISA използва тестове, които съдържат въпроси с избираем (структуриран) отговор и въпроси със свободен (конструиран) отговор – кратък и разширен. Задачите на PISA имат специфичен формат. Няколко въпроса са формулирани към един източник на информация – текст, таблица, диаграма, графика и др. – като по този начин се възпроизвеждат в максималната възможна степен конкретни реални ситуации.

Почти половината от всички въпроси в тестовите книжки са въпроси с избираем отговор, при които учениците избират един верен отговор от възможни четири или порядко пет. Към въпросите с избираем отговор отнасяме и тези задачи, при които ученикът избира един верен отговор от два възможни (задачи от вида „да/не” или „съгласен/несъгласен”), формулирани към няколко дадени твърдения. Останалите въпроси изискват от ученика сам да напише отговора си, който според условието на задачата може да се състои от една или няколко думи; кратки изречения, или от подълъг текст. Оценяването на отговорите на учениците на тези въпроси се извършва от експерти, преминавали конкретно обучение, и в съответствие с подробни критерии за оценяване. Отговорите на учениците получават различен брой точки не само според това дали са верни или не, но и според това дали са напълно или частично верни. За да се осигури надеждност на процедурите на оценяване, извадка от отговори на ученици се оценява независимо от четирима оценители в страната участник, както и от независими оценители на Международния консорциум.

Обикновено в оценяването се използват около 13 вида тестови книжки, в които задачите са представени в различни комбинации. Този модел е приложим, тъй като PISA не оценява отделните ученици, а сравнява постиженията на учениците от една държава с постиженията на техните връстници от останалите държави участнички в програмата.

Освен когнитивен тест в PISA се използват въпросници, което позволява постиженията на учениците да се анализират в контекста на семейната, социално-икономическата и образователната среда. Стандартно всички държави административат *въпросник за ученика и въпросник за училището*.

Целева група на PISA и извадка

Във всички държави, които участват в изследването, се оценяват равностойни целеви групи, като по този начин се осигурява сравнимост на резултатите. В PISA участват ученици, които в момента на тестирането са на възраст между 15 години и 3 месеца и 16 години и 2 месеца (най-общо 15-годишни) и посещават училище на територията на съответната държава, независимо от вида на училището, вида на подготовката и класа, в който учат (но не по-малък от 7. клас). В общия случай това са

ученици, които са в края на задължителното училищно образование. Вече посочихме, че PISA не оценява отделните ученици или училища. Изследването има за цел да представи обща картина на постиженията на 15-годишните ученици в трите ключови области (четене, математика, природни науки) в съответната страна и да ги анализира, като ги сравни с резултатите на участниците от останалите държави.

Определянето на националната целева група и изготвянето на националната извадка също се извършват на базата на технически стандарти, които са задължителни за всички участници в изследването. Целта е да се постигне възможно най-голяма представителност на националните резултати от изследването, т.е. да се гарантира, че резултатите от PISA отразяват уменията на всички 15-годишни ученици в съответната държава. Изключения са допустими само в много малко случаи и то след изрично одобрение от Международния консорциум. Конкретно училище може да бъде изключено от извадката, ако се намира в географски отдалечен и недостъпен район. В изследването не участват и учениците със специални образователни потребности.

Извадката на училищата, които участват в PISA, се изготвя от Международния консорциум. Процедурата изисква Националният център да предостави подробен списък на всички училища в страната участник, в които учат ученици от целевата група. Извадката се изготвя така, че да отразява точно структурата на училищната система.

Извадката на училищата се представя на три равнища: основна извадка, първо заместване и второ заместване. Националният център няма право да променя структурата ѝ по никакви причини и при никакви условия. Ако по някакви причини конкретно училище от извадката не участва в изследването (отказ от участие, закрито училище или училище с променен статут например), се прибегва до неговата първа замяна, а при необходимост – и до втората. Според техническите стандарти допустимите замени в основната извадка са не повече от 15%.

Извадката на учениците се изготвя в страната участник в изследването, като от общия списък на всички 15-годишни ученици в училището на случаен принцип посредством компютърна програма се избират 35. Там, където броят на 15-годишните е по-малък от 35, в тестирането участват всички ученици. Ако едно училище е включено в извадката, то участва в изследването, дори и в него да има само 3-ма ученици от целевата група.

Учениците в България, които попадат в целевата група, са от 7., 8., 9. и 10. клас. Обикновено най-голям е дялът на учениците в 9. клас. В Националния център за всеки ученик се подготвя конкретна тестова книжка, която се надписва с неговото име. Всеки ученик получава определената за него тестова книжка и решава само задачите в нея. Не се допуска отсъстващ ученик да бъде заменен с друг. Както вече посочихме, обикновено се подготвят около 13 варианта на тестови книжки, всяка от които съдържа различни клъстери с тестови въпроси. Така в група от 35 ученици, например, една и съща тестова книжка се попълва най-много от трима ученици.

Как се провежда оценяването PISA в училищата?

Тестирането се провежда от тестов администратор. Тестовият администратор не е служител в съответното училище и преминава специално обучение в Националния център. Тестовият администратор определя съвместно с училищното ръководство графика на изследването, като се съобразява с тестовия прозорец. Едно от задълженията на тестовия администратор е да гарантира, че в оценяването участват само учениците, включени в извадката, както и че са спазени техническите стандарти на PISA.

Тестовият администратор провежда изследването, като се ръководи от еднакъв за всички участници сценарий и по този начин гарантира, че всички ученици във всички участващи държави получават едни и същи указания. Тестирането протича в две сесии с продължителност по 60 минути всяка. Предвидена е 10-минутна почивка между сесиите. Така в продължение на два часа учениците попълват тестовите книжки. След кратка почивка след втората сесия, в продължение на около 30 минути (продължителността на тази сесия не е точно определена) те попълват и въпросник, в който предоставят информация за семейството си, навиците си за учене, нагласите си по отношение на четенето и др.

Какво следва?

В момента в ЦКОКУО се подготвя основното изследване на PISA 2012. Основната оценявана област е математическата грамотност на учениците. **Тестовият прозорец започва непосредствено след пролетната ваканция на учениците и продължава до 11 май 2012 г. включително.** Според техническите стандарти на PISA периодът на тестиране не трябва да съвпада с първите шест седмици след началото на учебната година и последните шест седмици преди края на учебната година. Освен това периодът между два последователни етапа на оценяването не трябва да е по-кратък от 3 години.

Националната извадка на училищата ще бъде готова на 12 януари 2012 г. Очакваме в извадката да бъдат включени около 210 училища от цялата страна. Непосредствено след това до ръководствата на училищата в извадката ще бъдат изпратени покани за участие. Подробна информация за предстоящите дейности ще бъде изпратена и на началниците на всички РИО с молба да бъдат определени най-малко двама тестови администратори, които да проведат изследването в съответния регион. Броят на тестовите администратори зависи от броя на училищата в извадката. Обикновено най-големи са извадките на региони София-град, Благоевград, Пловдив и Варна. Необходимо е поне един от тестовите администратори да притежава добри компютърни умения, тъй като той ще бъде ангажиран с провеждането на компютърно-базираното оценяване.

През 2012 г. български ученици за пръв път ще участват в компютърно-базирано оценяване. Изобщо, в бъдещите тестове на PISA ще се поставя все по-голямо ударение върху уменията на учениците да четат и разбират електронни текстове и да решават проблеми, представени в електронен формат. Така PISA ще се съобрази с огромното значение, което информацията и компютърните технологии имат в модерните общества.

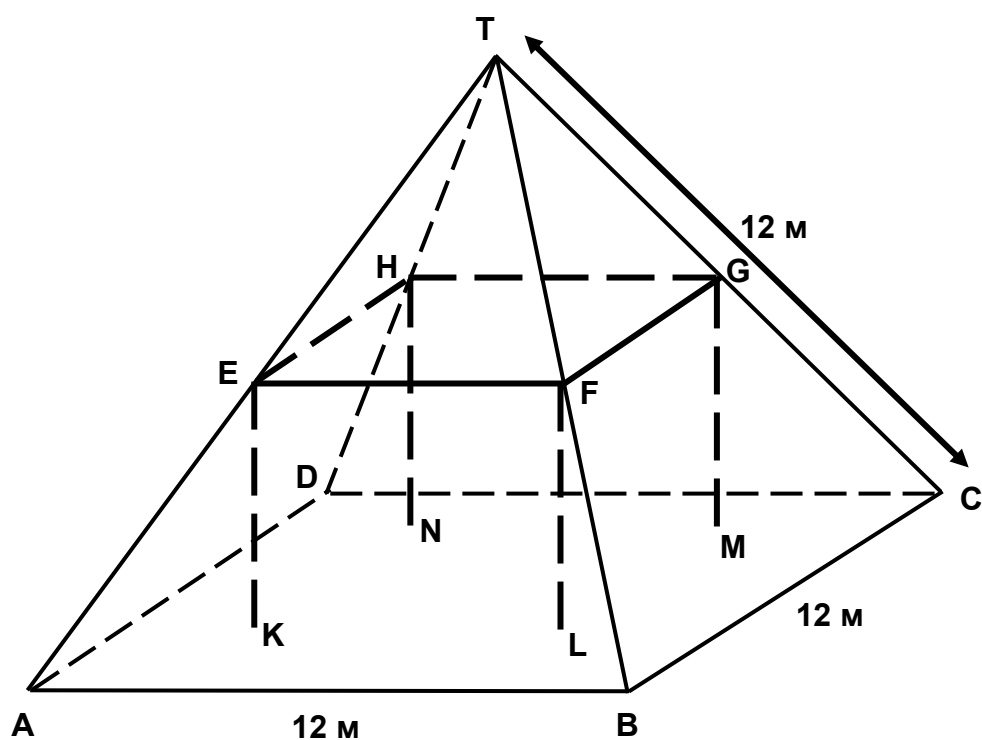
Компютърно-базираното оценяване през април-май 2012 г. ще се проведе след приключване на сесията за попълване на тестовите книжки и въпросниците. Участниците в него ще бъдат не повече от 18 ученици от всяко училище. Те се определят на случаен принцип от учениците, които вече са определени да участват в PISA. Компютърно-базираното оценяване (включително подготовката и провеждането) ще отнеме около 1 час и 30 минути. Компютърният тест се състои от интерактивни задачи, които измерват уменията на учениците да решават проблеми.

ФЕРМИ



На снимката е показана селска къща с покрив във форма на пирамида.

На чертежа долу, направен от ученик, е изобразен математически модел на **покрива** с



обозначени дължини.

Таванският етаж ABCD има форма на квадрат. Гредите, които поддържат покрива, представляват ръбове на паралелепипед (правоъгълна призма) EFGHKL MN. Точка E е среда на AT, точка F е среда на BT, точка G е среда на CT и точка H е среда на DT. Всички ръбове на пирамидата в модела имат дължина 12 м.

ВЪПРОС 1.

Пресметнете лицето на повърхнината на таванския етаж ABCD.

Лицето на таванския етаж ABCD = _____ м²

ТРУДНОСТ: 492 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Възпроизвеждане

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

144 (мерната единица е дадена в условието)

ВЪПРОС 2.

Пресметнете дължината на EF – единия от хоризонталните ръбове на паралелепипеда.

Дължината на EF = _____ м

ТРУДНОСТ: 524 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

6 (мерната единица е дадена в условието)

ЯБЪЛКОВИ ДРЪВЧЕТА

Селски стопанин засажда ябълкови дръвчета в успоредни редици, които пресичайки се образуват квадрати. За да защити ябълковите дръвчета от вятъра, стопанинът засажда иглолистни дръвчета около градината.

На чертежите е представено разположението на ябълковите и иглолистните дръвчета при различен брой (n) на редовете с ябълкови дръвчета.

X – иглолистно дръвче

● – ябълково дръвче

```

X X X
X ● X
X X X
    
```

```

X X X X X
X ● ● X
X X X
X ● ● X
X X X X X
    
```

```

X X X X X X X
X ● ● ● X
X X X X
X ● ● ● X
X X X X
X ● ● ● X
X X X X X X X
    
```

```

X X X X X X X X X
X ● ● ● ● X
X X X X X
X ● ● ● ● X
X X X X X
X ● ● ● ● X
X X X X X
X ● ● ● ● X
X X X X X X X X X
    
```

ВЪПРОС 1.

Попълнете таблицата:

n	Брой ябълкови дръвчета	Брой иглолистни дръвчета
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

ТРУДНОСТ: 548 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Попълнете таблицата:

n	Брой ябълкови дръвчета	Брой иглолистни дръвчета
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

Пълен кредит

Всичките седем попълнени числа са верни, както е показано в таблицата.

ВЪПРОС 2.

Можете да използвате две формули, за да пресметнете броя на ябълковите и иглолистните дръвчета, посадени по описаната схема:

Брой ябълкови дръвчета $= n^2$

Брой иглолистни дръвчета $= 8n$

където n е броят на редовете с ябълкови дръвчета.

При определена стойност на n броят на ябълковите дръвчета е равен на броя на иглолистните дръвчета. Намерете стойността на n , при която броят на ябълковите дръвчета е равен на броя на иглолистните, и представете по какъв начин е пресметната.

.....
.....

ТРУДНОСТ: 655 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

Отговори с верен отговор $n = 8$ като:

- $n^2 = 8n$, $n^2 - 8n = 0$, $n(n - 8) = 0$, $n = 0$ и $n = 8$, т. е. $n = 8$
- $n^2 = 8^2 = 64$, $8n = 8 \cdot 8 = 64$
- $n^2 = 8n$, от което следва, че $n = 8$.
- $8 \times 8 = 64$, $n = 8$
- $n = 8$
- $8n = 8^2$

Отговори, които съдържат и двата верни отговора: $n=8$ И $n=0$.

ВЪПРОС 3.

Да предположим, че селският стопанин има намерение да засади овощна градина с много редове дървчета. Броят на кой от двата вида дървчета (ябълкови или иглолистни), ще се увеличава по-бързо с увеличаването на размерите на градината? Обяснете как сте получили отговора.

.....

.....

ТРУДНОСТ: 723 точки от скалата по математика (при пълен кредит) и 672 точки (при непълен кредит)

КОМПЕТЕНТНОСТ: Осмисляне

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

Верен отговор (ябълкови дървчета), придружен от правилно обяснение като например:

- Ябълкови дървчета = $n \times n$ и иглолистни дървчета = $8 \times n$. И двете формули съдържат множител n , но n , изразяващо броя на ябълковите дървчета, има друга стойност, която нараства, докато множителят 8 запазва постоянна числена стойност. Броят на ябълковите дървчета се увеличава по-бързо.
- Броят на ябълковите дървчета се увеличава по-бързо, защото числената им стойност се увеличава на квадрат, вместо да се умножава по 8.
- Броят на ябълковите дървчета се увеличава квадратично, докато броят на иглолистните дървчета се увеличава линейно. Поради това броят на ябълковите дървчета се увеличава по-бързо.
- Решението съдържа графика, илюстрираща, че n^2 надвишава $8n$ след преминаване на стойността $n=8$.

Непълен кредит

Верен отговор (ябълкови дървчета), обоснован с конкретни примери или допълване на таблицата.

- Броят на ябълковите дървчета се увеличава по-бързо от броя на иглолистните дървчета, което следва от таблицата на предходната страница. Това важи особено, след като броят на ябълковите и иглолистните дървчета се изравняват.
- Таблицата показва, че броят на ябълковите дървчета се увеличава по-бързо.

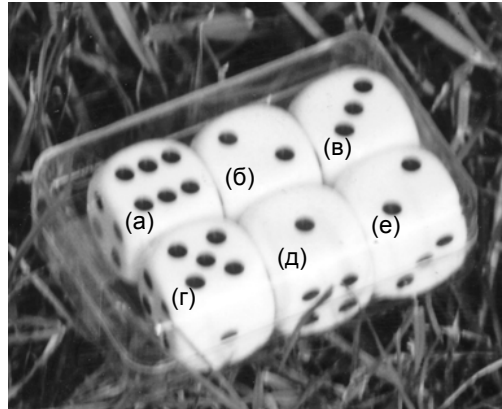
Верен отговор (ябълкови дървчета) с обяснение, от което става ясно, че ученикът разбира връзката между n^2 и $8n$, но не я представя достатъчно ясно.

- Ябълковите дървчета след $n > 8$.
- След 8 реда броят на ябълковите дървчета ще се увеличава по-бързо от този на иглолистните.

КУБОВЕ

На снимката виждате 6 зара, обозначени с букви от (а) до (е). Следното правило важи за всички зарове:

Сборът от точките на всеки две противоположни стени на зара е 7.



ВЪПРОС

Впишете в квадратчетата броя на точките на *срещуположната* стена на всеки от заровете, показани на снимката.

(а)	(б)	(в)
(г)	(д)	(е)

ТРУДНОСТ: 516 точки от скалата по математика

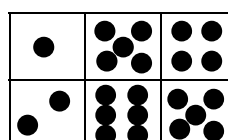
КОМПЕТЕНТНОСТ: Възпроизвеждане

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

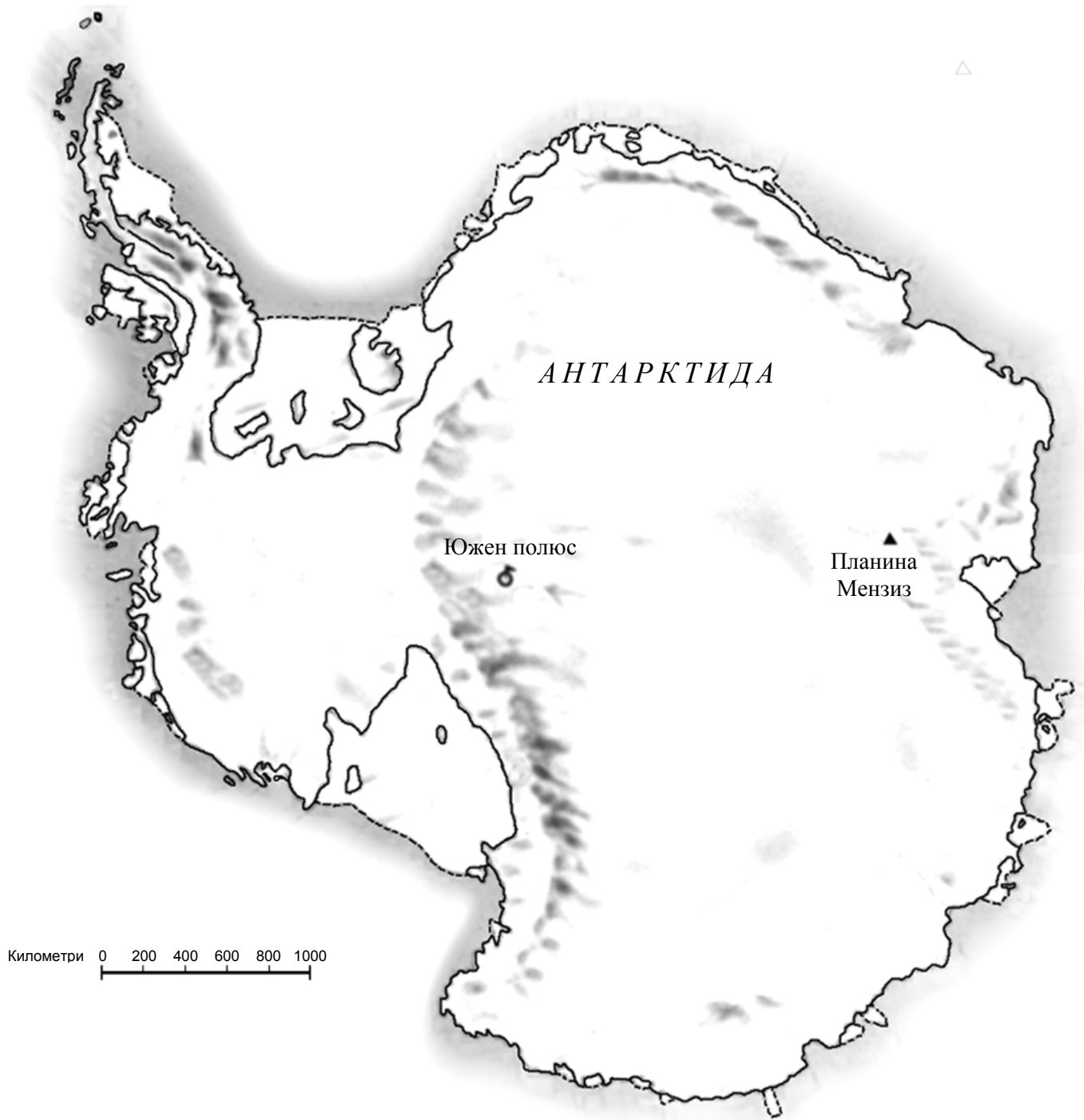
Горен ред (1 5 4); Долен ред (2 6 5). Приемлив е и аналогичен отговор, при който в квадратчетата са нарисувани лицата на заровете.

1	5	4
2	6	5



ИЗМЕРВАНЕ НА ПЛОЩ НА КОНТИНЕНТ

Разгледайте картата на Антарктида.



ВЪПРОС

Изчислете приблизителната площ на Антарктида, като използвате дадения мащаб.

Напишете вашето решение и обяснете как сте получили приближения отговор. (Можете да чертаете върху картата, ако това ще ви помогне да извършите пресмятането.)

.....

.....

.....

ТРУДНОСТ: 712 точки от скалата по математика (при пълен кредит) и 629 (при непълен кредит)

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

Решения, при които е използван правилен метод И е даден правилен отговор.

Решение, получено чрез начертаване на квадрат или правоъгълник и намиране на лице – между 12 000 000 км² и 18 000 000 км² (посочването на мерните единици не е задължително);

Решение, получено чрез начертаване на кръг и намиране на неговото лице – между 12 000 000 км² и 18 000 000 км²;

Решение, получено чрез разделяне на площта на няколко правилни геометрични фигури и намиране на лицето на всяка от тях – между 12 000 000 и 18 000 000 км²;

Решение, получено по друг правилен начин – между 12 000 000 км² и 18 000 000 км²;

Верен отговор (между 12 000 000 км² и 18 000 000 км²), но не е показано решение.

Непълен кредит

Решения, при които е използван правилен метод, НО е даден неправилен или непълен отговор.

Решение, получено чрез начертаване на квадрат или правоъгълник и намиране на лице – методът е правилен, но отговорът е погрешен или непълен:

- Ученикът чертае правоъгълник и умножава дължините на двете му страни, но полученият отговор е по-малък или по-голям от допустимите граници (например 18 200 000).
- Ученикът чертае правоъгълник и умножава дължините на двете му страни, но броят на нулите е погрешен (например 4000 x 3500=140 000).
- Ученикът чертае правоъгълник и умножава дължините на двете му страни, но пропуска да преобразува получения резултат в квадратни километри с помощта на мащабната скала (например 12 x 15 см=180).
- Ученикът чертае правоъгълник; посочва, че търсената площ е равна на 4000 км x 3500 км, но не довършва решението.

Решение, получено чрез начертаване на кръг – методът е правилен, но отговорът е погрешен или непълен.

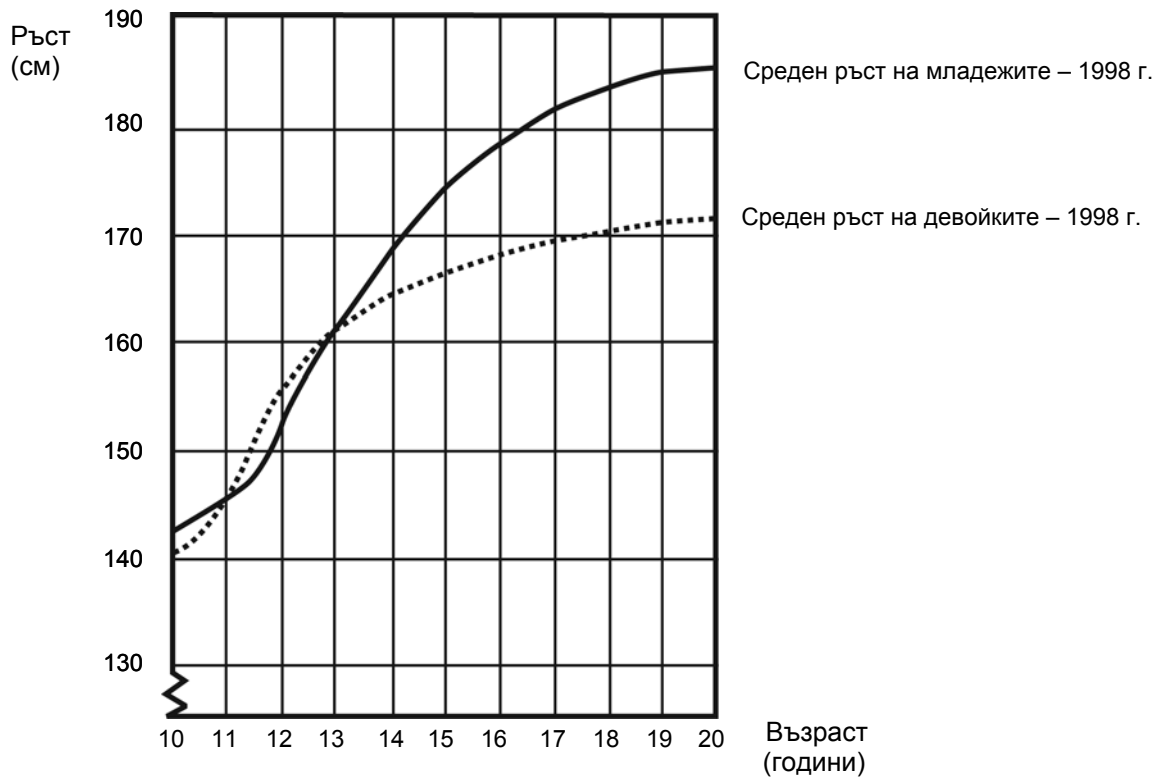
Решение, получено чрез разделяне на площта на няколко правилни геометрични фигури и намиране на лицето на всяка от тях – методът е правилен, но отговорът е погрешен или непълен.

Решение, получено с помощта на друг правилен метод, но отговорът е погрешен или непълен.

ИЗРАСТВАНЕ

Младежите увеличават ръста си.

Данните за средния ръст на младежите и девоиците в Холандия през 1998 г. са представени на следната графика.



ВЪПРОС 1.

От 1980 г. насам средният ръст на 20-годишните девоици се е увеличил с 2,3 см – до 170,6 см. Пресметнете какъв е бил средният ръст на девоиците на 20-годишна възраст през 1980 г.

..... см

ТРУДНОСТ: 506 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Възпроизвеждане

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

168,3 см (мерната единица е дадена в условието)

ВЪПРОС 2.

Обяснете по какъв начин графиката показва, че средният темп на израстване при момичетата се забавя след навършване на 12 години.

.....

.....

.....

ТРУДНОСТ: 559 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

В отговорите трябва да се посочва „промяната” в наклона на кривата, илюстрираща темпа на израстване на момичетата. Това може да бъде изразено явно или да се подразбира от отговора.

Ученикът посочва, че наклонът на кривата намалява след преминаване на границата от 12 години, като използва ежедневен език, а не математически термини:

- Кривата вече не върви нагоре, а тръгва настрани.
- Кривата става хоризонтална.
- Кривата е по-плоска след 12 год.
- Кривата на момичетата започва да се изравнява, а тази на момчетата продължава да се изкачва.
- Тя се изправя, а графиката на момчетата продължава да расте.

Ученикът посочва, че наклонът на кривата намалява след преминаване на границата от 12 години, като използва езика на математиката:

- Наклонът на кривата е по-малък.
- Темпът на промяна на отчитаната величина намалява от 12 години нагоре.
- [Ученикът е изчислил ъглите, сключени между кривата и абсцисата преди и след преминаване на границата от 12 години.]

Приемете употребата на думи като „наклон на кривата” или „коэффициент на изменение” за математически термини.

Ученикът сравнява темповете на израстване (сравнението може да бъде явно изразено):

- Между 10 и 12-годишна възраст ръстът се увеличава с около 15 см, докато увеличението между 12 и 17-годишна възраст е само 17 см.
- Средният темп на израстване между 10 и 12 години е около 7,5 см на година, а между 12 и 20 години е само около 2 см на година.

ВЪПРОС 3.

Обяснете, според графиката, през кой период от живота им средният ръст на жените е по-висок от този на мъжете на същата възраст?

.....

.....

ТРУДНОСТ: 529 точки от скалата по математика (при пълен кредит) и 415 точки (при непълен кредит)

КОМПЕТЕНТНОСТ: Възпроизвеждане

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

Ученикът посочва правилния период – между 11 и 13-годишна възраст:

- На възраст между 11 и 13 години.
- От 11 до 13-годишна възраст средният ръст на момичетата е по-висок от този на момчетата.
- 11-13 г.

Ученикът посочва, че момичетата са по-високи от момчетата, когато са на 11 и 12 години. (Този отговор е правилен, въпреки, че е използван ежедневен език, тъй като обозначава правилния интервал – 11–13 години.).

- Момичетата са по-високи от момчетата, когато са на 11 и 12 години.
- на 11 и 12 години.

Непълен кредит

Други отговори (11, 12, 13), които са в границите на правилния период, но не отговарят на изискването за пълен кредит:

- от 12 до 13
- 12
- 13
- 11
- от 11,2 до 12,8.

СКОРОСТ НА СЪСТЕЗАТЕЛЕН АВТОМОБИЛ

Кривата показва как се променя скоростта на състезателен автомобил при движение по равна трикилометрова затворена писта по време на втората обиколка.



ВЪПРОС 1.

Колко е приблизителното разстояние между стартовата линия и началото на най-дългия прав участък от пистата?

- А 0,5 км
- Б 1,5 км
- В 2,3 км
- Г 2,6 км.

ТРУДНОСТ: 492 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

- Б. 1,5 км

ВЪПРОС 2.

В кой участък от пистата е регистрирана най-ниска скорост по време на втората обиколка?

- А На стартовата линия
- Б На около 0,8 км от старта
- В На около 1,3 км от старта
- Г По средата на разстоянието между старта и финала.

ТРУДНОСТ: 403 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Възпроизвеждане

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

- В. На около 1,3 км от старта.

ВЪПРОС 3.

Какво можете да кажете за скоростта на автомобила между точките, които отбелязват 2,6 км и 2,8 км от стартовата линия?

- А Скоростта на автомобила е постоянна.
- Б Скоростта на автомобила се увеличава.
- В Скоростта на автомобила намалява.
- Г Скоростта на автомобила не може да бъде определена с помощта на графиката.

ТРУДНОСТ: 413 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Възпроизвеждане

ОЦЕНЯВАНЕ

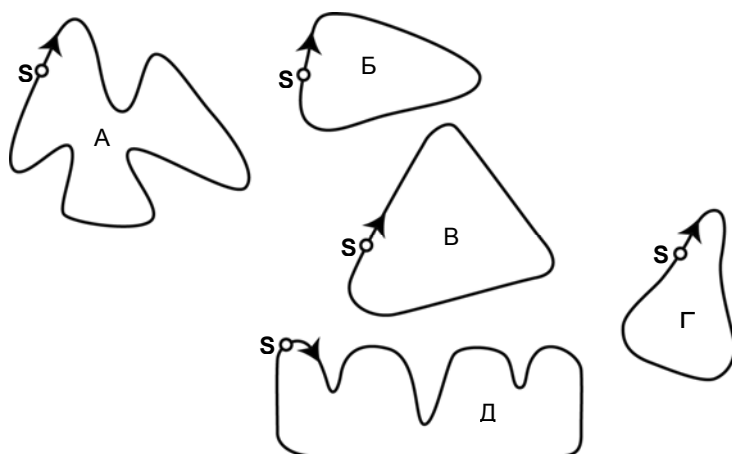
Пълен кредит

Б. Скоростта на автомобила се увеличава.

ВЪПРОС 4.

Разгледайте чертежите на пет писти за автомобилни състезания.

На коя от пистите е пилотиран състезателният автомобил, за да се получи посочената крива на скоростта?



S: Стартова линия

ТРУДНОСТ: 655 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

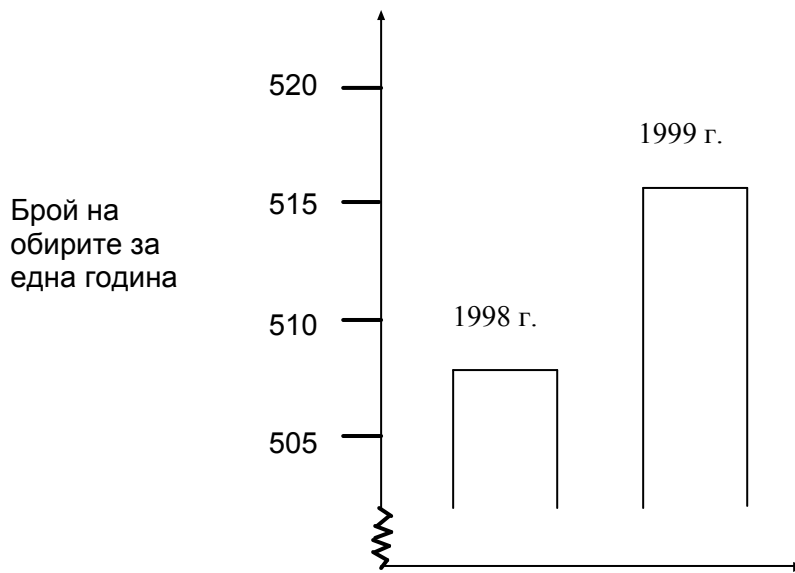
ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит: Б

ОБИРИ

Телевизионен репортер коментира показаната графика по следния начин:

„Графиката показва, че от 1998 до 1999 г. броят на обирите нараства значително.”



ВЪПРОС

Смятате ли, че репортерът интерпретира правилно графиката? Подкрепете отговора си с аргументи.

.....

.....

.....

.....

ТРУДНОСТ: 710 точки от скалата по математика (при пълен кредит) и 609 точки (при непълен кредит)

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

Ученикът посочва, че графиката е неправилно интерпретирана. В отговора се подчертава, че е показана **само малка част** от графиката.

- Неправилно. Необходимо е да се покаже цялата графика.

- Мисля, че интерпретацията е необоснована, тъй като ако се покаже цялата графика, ще се види, че е налице само малко увеличение на броя на обирите.
- Не, защото той използва само горната част на графиката, а ако разгледаме цялата графика от 0 до 520 ще видим, че увеличението не е толкова голямо.
- Не, защото графиката прави да изглежда, че има голямо увеличение на данните, а всъщност увеличението е малко.

Ученикът посочва, че графиката е неправилно интерпретирана. Отговорът е подкрепен с правилни аргументи, отнасящи се до съотношението или процентното увеличение.

- Не, графиката е неправилно интерпретирана. 10 не е голямо увеличение в сравнение с общия брой от 500.
- Не, графиката е неправилно интерпретирана. Увеличението е само с 2%.
- Не. 8 обира повече прави увеличение от само 1,5%. Според мен, това не е много!
- Не, обирите са се увеличили само с 8 или 9 за тази година. В сравнение с 507 това не е голямо число.

Ученикът посочва, че са необходими данни за тенденциите, преди да се направи преценка.

- Не можем да преценим дали увеличението е голямо или не. Ако през 1997 г. броят на обирите е същият както през 1997 г., тогава можем да кажем, че има голямо увеличение през 1999 г.
- Няма как да знаем какво означава „голямо“, защото е необходимо да имаме поне две изменения, за да може едното да се определи като голямо, а другото като малко.

Непълен кредит

[Бележка: Тъй като скалата на графиката не е много ясна, следва да се приемат за правилни отговори между 5 и 15 за увеличението на броя на обирите.]

Ученикът посочва, че графиката е неправилно интерпретирана, но не се аргументира достатъчно добре.

- Анализира САМО увеличението като абсолютна стойност, без да го сравнява с общия брой.
- Не, не е обоснована. Увеличението е само с 10 обира. Думата „голямо“ не отразява точно увеличението на броя на обирите. Увеличението е само с 10 и не може да се нарече „голямо“.
- Увеличение от 508 на 515 не е голямо.
- Не, защото 8 или 9 не е голяма стойност.
- До известна степен. Промяната от 507 на 515 е увеличение, но не голямо.

Ученикът посочва, че интерпретацията не е правилна, използва правилен метод на решаване, но допуска незначителни технически грешки в изчисленията.

- Правилен метод и извод, но увеличението е изчислено като 0.03%.

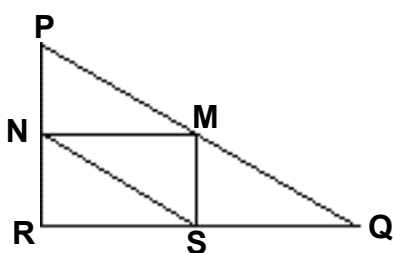
ТРИЪГЪЛНИЦИ

ВЪПРОС

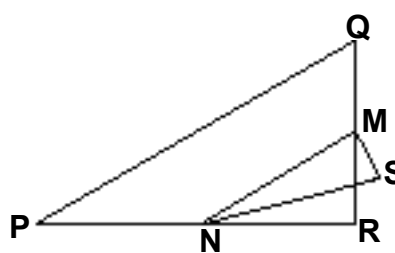
Оградете с кръгче буквата, обозначаваща фигурата, която съответства на следното описание.

Даден е правоъгълният триъгълник PQR с прав ъгъл R. Отсечката RQ е по-къса от отсечката PR. М е средата на PQ, а N е средата на QR. Точка S е вътре в триъгълника. Отсечката MN е по-дълга от отсечката MS.

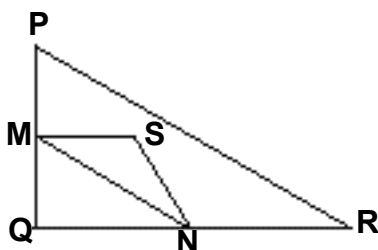
А



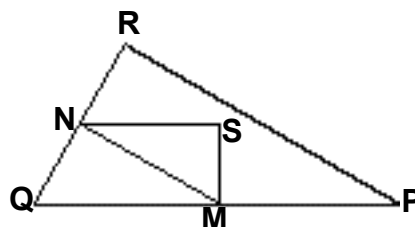
Б



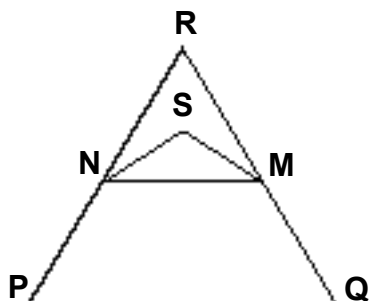
В



Г



Д



ТРУДНОСТ: 537 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Възпроизвеждане

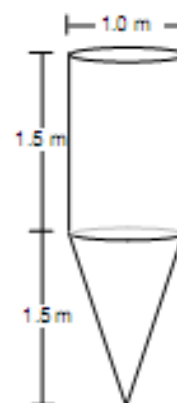
ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит: Г

РЕЗЕРВОАР ЗА ВОДА

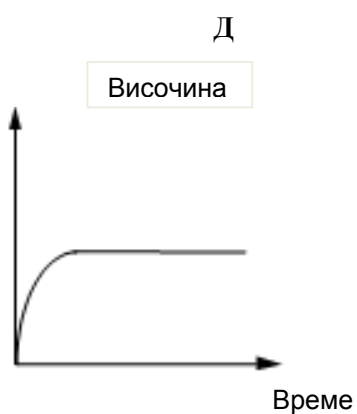
Резервоар за вода има форма и размери, както е показано на чертежа.

Първоначално резервоарът е празен. След това той се пълни с вода със скорост от един литър на секунда.



ВЪПРОС

Коя от следващите графики показва как се променя височината на водната повърхност с течение на времето?



ТРУДНОСТ: НЯМА ДАННИ

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит: Б

КОНЦЕНТРАЦИЯ НА ЛЕКАРСТВО

ВЪПРОС 1.

На жена, която се лекува в болница, инжектират пеницилин. Организмът ѝ постепенно разгражда пеницилина, съдържащ се в кръвта, поради което един час след инжекцията само 60% от пеницилина все още е активен.

Процесът продължава да се развива по същата формула: с изтичането на всеки час само 60% от пеницилина, съдържащ се в кръвта в края на предходния час, остава активен.

Да предположим, че жената получава доза от 300 мг пеницилин в 08.00 ч.

Попълнете таблицата, на която е отбелязано количеството на активния пеницилин, съдържащо се в кръвта на жената през интервали от един час за времето от 08.00 до 11.00 часа.

Време	08.00	09.00	10.00	11.00
Пеницилин (мг)	300			

ТРУДНОСТ: НЯМА ДАННИ

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

И трите попълнени числа са верни, както е показано:

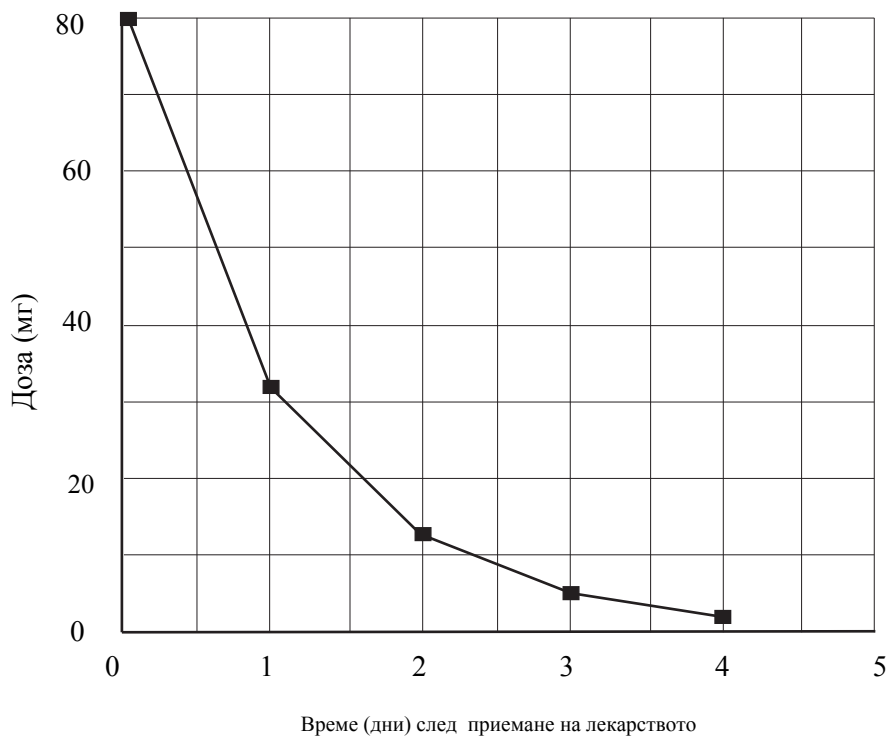
Време	08.00	09.00	10.00	11.00
Пеницилин (мг)	300	180	108	64,8 или 65

Непълнен кредит

Едно или две от попълнените числа са верни.

ВЪПРОС 2.

Петър трябва да приеме 80 мг от лекарство за коригиране на кръвното налягане. На графиката е показана първоначалната концентрация на лекарството и концентрацията, която остава в кръвта на Петър след един, два, три и четири дни.



Какво количество от приетото лекарство остава активно в края на първия ден?

- А 6 мг
- Б 12 мг
- В 26 мг
- Г 32 мг

ТРУДНОСТ: НЯМА ДАННИ

КОМПЕТЕНТНОСТ: Възпроизвеждане

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

Г. 32 мг.

ВЪПРОС 3.

От графиката към втори въпрос можем да направим извод, че всеки ден концентрацията на лекарството в кръвта на Петър намалява приблизително в същото съотношение както в предходния ден.

Кой от четирите отговора показва приблизителното съотношение на остатъчната концентрация на лекарството в сравнение с предходния ден?

- А 20%
- Б 30%
- В 40%
- Г 80%

ТРУДНОСТ: НЯМА ДАННИ

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

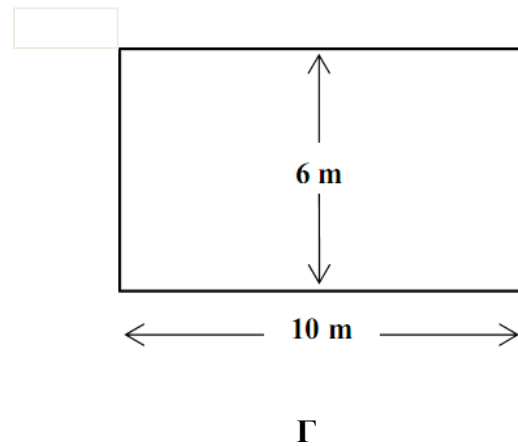
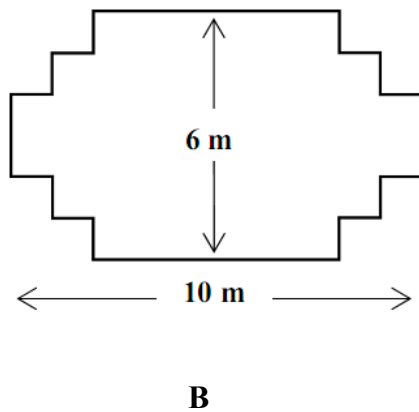
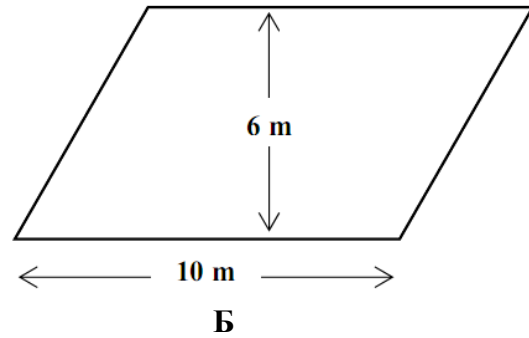
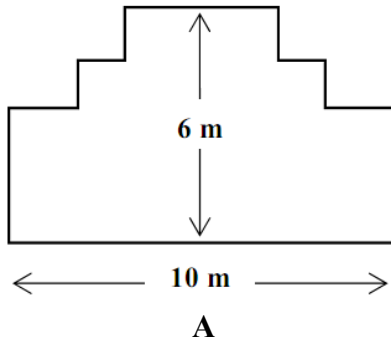
Пълен кредит

В. 40%

ДЪРВОДЕЛЕЦ

ВЪПРОС

Дърводелец разполага с 32 м дървен материал и иска да направи ограда около градинска леха.



Изберете „Да” или „Не” за всяка скица, за да посочите дали градинската леха може да бъде оградена с 32 метра дървен материал.

Скица на градинската леха	Като се използва тази скица, може ли градинската леха да бъде оградена с 32 метра дървен материал?
Скица А	Да / Не
Скица Б	Да / Не
Скица В	Да / Не
Скица Г	Да / не

ТРУДНОСТ: 700 точки от скалата по математика

КОМПЕТЕНТНОСТ: Определяне на логически зависимости

ОЦЕНЯВАНЕ

Пълен кредит

Всички четири верни отговора в този ред: Да, Не, Да, Да.

ОБУЧИТЕЛНИ ПРАКТИКИ В БЪЛГАРСКОТО УЧИЛИЩЕ

В тази част ще направим опит да погледнем на изследването на степента на математическа грамотност чрез съществуващите обучителни практики по математика в българското училище. Доколкото системата на обучение у нас създава условия да се формират трайни и устойчиви знания и умения, имащи съществена връзка с опита на учениците, да се изградят интердисциплинарни отношения с реална значимост.

Да си математически грамотен означава, най-общо казано, да можеш:

- Да решиш какво трябва да измериш, изчислиш или преброиш;
- Да разчиташ и записваш информацията по правилата на математическия език;
- Да изпълняваш точно и докрай процедури за изчисляване и сравняване;
- Да оценяваш и проверяваш резултатите си;
- Да избираш и ползваш правилните методи, инструменти и технологии.

И всичко това в контекста на ежедневните проблеми в училище, на работното място, сред приятелите, сред потока от информация в глобалната мрежа и т.н.

Всички тези компетентности са заложили в учебните програми по математика в нашето училище. Това от своя страна е предпоставка за формирането на педагогически практики, които поставят получаването и оценяването на математическите знания във функционална среда.

Какво не достига?

Простичко казано, достатъчно емпиричен материал и специфични източници за обработка на информацията в час, за да бъде ученикът в реална, позната ситуация. Достатъчно стимули и мотиви за употреба на математическото познание чрез ситуации и дейности, свързани с обяснение, преценка, комуникация, критично отношение.

И още нещо. Нов актуален прочит на целите на обучението и на математическото познание в училищното обучение.

Иницилирането на проява на математическа грамотност изисква наличие на три елемента:

- Ситуация, която поражда проблемите;
- Математическо знание, което е ключ за решаване на възникналите проблеми;
- Математически компетентности, т.е. дейности (умения и отношения, които да свържат ситуацията и необходимото знание.

От тази гледна точка е важно да преориентираме начина, по който учим и оценяваме учениците. Обичайните практики в обучението по математика у нас са свързани с необходимостта само от математическо съдържание и отработване на умения за решаване на „чисто математически задачи”.

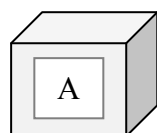
Този материал няма за цел да анализира всички страни на съществуващите обучителни практики в математическото училищно образование у нас. В следващите примери ще илюстрираме някои възможности как традиционните практики за обучение и оценяване могат да се интерпретират в духа на съвременните разбираня за математически грамотен човек.

Примери от практиките за обучение и оценяване

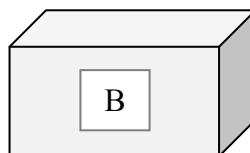
Първи пример. В 6. клас всички знаем, че изучаването на рационалните числа затруднява и обърква много ученици. Ето как предлага да стане по-разбираемо и достъпно правилото за събиране на рационални числа Джон Мейтън (канадски учител и педагог) в интервю пред „New York Times” – „Вместо „Колко е $(-7 + 5)$?” можем да попитаме така: „Представи си, че играеш за пари. Загубил си седем долара, а си спечелил пет. **Не ми казвай число. Каж ми само дали денят е бил добър за тебе или не?**”.

Втори пример. Изучаването на дробите започва в 5. клас. Доброто осмисляне на правилата за действия и сравняване на дробни числа гарантира успешно усвояване на уменията за намиране на част (процент) от число. Това по-нататък подпомага намирането на вероятности и обработката на данни. Традиционно остава неубедителното представяне на нашите ученици в различни оценявания и изследвания по задачи, изискващи тези компетентности. Този пример е конструиран върху източник на задача в изследването TIMSS 2008.

Дадени са две кутии: в малката кутия А има 36 топки, а в голяма кутия В – 48.



36 топки



48 топки

Въпрос 1. Половината от топките във всяка кутия са бели, а другите са зелени. Коя кутия ще избереш, **ако искаш да имаш повече бели топки?**

Въпрос 2. В кутия А топките са номерирани от 1 до 36. В кутия В топките са номерирани от 1 до 48. Можете да изтеглите топка от коя да е кутия, без да гледате. Коя от кутиите Ви **дава по-голям шанс** да изтеглите топка с номер 20?

Тук ще разгледаме две от задачите (**Вятърна мелница** и **Сглобяване на триъгълник**) от проведената от ЦКОКУО през март 2011 година апробация по математика в 7. клас. Това са задачи за функционално четене, т.е. за разчитане, свързване и интерпретация на данни, откриване и записване на зависимости, изследване и формулиране и **са съотнесими към задачите от международното изследване PISA по съдържание, контекст (ситуация), структура и цел на изследване**. Основните съдържателни области са: числа и действия с тях; закономерности и функционални връзки; двумерни и тримерни фигури и работа с данни.

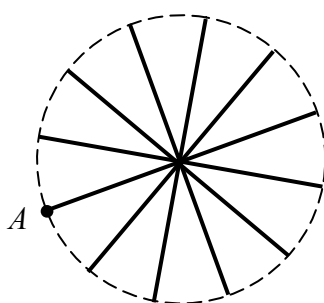
Трети пример. Ще разгледаме резултатите по три от задачите с общ източник – текст и чертеж. Използването на този формат на структуриране на условие на задачи е по-подходящ, тъй като изисква по-малко време за четене и осмисляне на условието. Използваните характеристики на задачите са в съответствие с наложената у нас практика и терминология.

ВЯТЪРНА МЕЛНИЦА

В миналото, хората използвали силата на вятъра чрез вятърни мелници, с които мелели зърно, получавали брашно и олио, изпомпвали вода. Днес вятърните мелници са по-скоро туристическа атракция.

Една от най-известните мелници в България се намира в Несебър. Тя има 12 дървени перки с общ център, разположени на равни разстояния една от друга, което я прави уникална.

Чертежът представя как са разположени нейните перки.



Въпрос 1. Колко градуса сключват две съседни перки на мелницата в Несебър?

Отговор.°

Съдържателен елемент. Ъгли

Познавателно равнище. Знание

Измервана математическа компетентност. Представяне и анализ на ситуация

Дейност. Намира мярка на ъгъл чрез деление (При решаването на задачата няма ограничение за използване на ъгломер при определяне мярката на търсения ъгъл.)

Контекст. Образователен и професионален

Оценяване: правилен отговор – 1 точка, друг отговор или непосочен отговор – 0 точки

Резултати: Задачата е решавана от 242 (91%) ученици от извадката, работили по тази група задачи. Има трудност 47% и дискриминативна сила 0,30. Данните показват, че тя е била трудна най-вече за учениците със слаби резултати.

Коментар: Почти половината от учениците могат да анализират данни от двата източника и да приложат известни факти в непозната ситуация.

Въпрос 2. Дължината на една перка е 4 m. Колко НАЙ-МАЛКО цяло число метра изминава върхът на една перка (например точката A) за един оборот?

Тук използвайте приближението $\pi = 3,14$.

Отговор. m

Съдържателен елемент. Дължина на окръжност

Познавателно равнище. Приложение

Измервана математическа компетентност: Математическо мислене и разсъждаване

Дейност. Намира дължина на окръжност и оценява получен резултат при зададено условие.

Контекст. Образователен и професионален

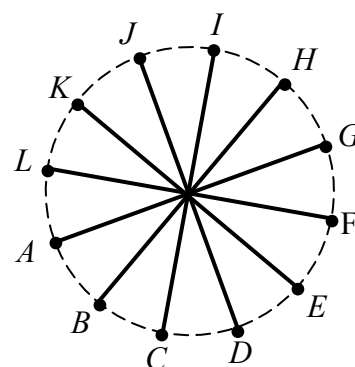
Оценяване. правилен отговор – 2 точки, правилно намерена дължина на окръжност, но неправилно определено цяло число – 1 точка; друг отговор или непосочен отговор – 0 точки

Резултати. Задачата е решавана от 204 (76%) ученици от извадката, работили по тази група задачи. Резултатите на тези ученици са: 54% получили 2 точки, 16% получили 1 точка и само 6 % получили 0 точки.

Коментар. Тревожен тук е фактът, че $\frac{1}{4}$ от учениците не са работили по тази задача, която изисква прилагане на формула, изучавана в 6. клас. Отговорите на всички ученици, получили 0 точки, са два типа – използвана формула за лице на кръг или не различава понятията радиус и диаметър. Задачата е много подходяща за формат със свободен отговор.

Въпрос 3. Върховете на перките са означени с букви. Като използвате само тези букви, запишете в дясната колона на таблицата фигура, която отговаря на условието вляво.

Условие	Фигура
Триъгълник, еднакъв на $\triangle AEG$, е:	
Равностранен триъгълник с връх в точката L е:	
Симетралата на отсечката DF е:	
Правоъгълен триъгълник с ъгъл при върха H , равен на 30° , е:	



Съдържателен елемент. Елементи на триъгълник. Видове триъгълници

Познавателно равнище. Анализ и синтез

Измервана математическа компетентност. Математическа комуникация

Дейност. Правене на заключения от дадена информация чрез избор и комбинирание на резултати за получаване на нови резултати

Контекст. Научен

Оценяване. четири правилни отговора – 4 точки; три правилни отговора – 3 точки; два правилни отговора – 2 точки; един правилен отговор – 1 една точка, нито един правилен отговор или непосочен отговори в цялата таблица – 0 точки

Резултати. Задачата е решавана от 239 от 267 ученици в тази извадка (11% не са работили по нея) – тази валидност е близка до оптималния процент нерешавали. Има среден резултат 1,85 точки, като 19% от учениците имат 1 точка, 18% - 2 точки, 18% имат 3 точки и 13% - 4 точки. Трудността и е 0,46 и е с много добра дискриминативна сила 0,62 – това я определя като по-скоро средна по трудност задача, която много добре разпределя групите на учениците с високи и ниски резултати.

Коментар. Задачата е самостоятелна единица към трикомпонентната задача с общо условие. Тя измерва независимо 4 взаимно свързани съдържателни елемента, като се използва само една база от данни – конструкция, която при задачите от затворен тип, е прието да се представя с четири отделни задачи. Ученикът сам избира от различните варианти за правилен отговор и използвайки математическата символика сам записва отговора – в този смисъл основният измерван конструкт е умението да се ориентира в практическа геометрична конструкция и да запише изводите си като използва точен математически език. Многостъпковото оценяване дава възможност за равномерно

разпределение на получените резултати и диагностика на грешките чрез двойно кодиране.

Четвърти пример. Прилагането на неравенството на триъгълника (условията за съществуване на триъгълник) е задача, традиционна трудна за учениците. Тази задача е представена на учениците преди те да са изучавали системно неравенства и техните приложения в геометрията. Удачната формулировка е една опитна постановка, в която ученикът може сам да достигне до необходимите изводи.

СТГЛОБЯВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

Павлин има шест пръчици с дължини: 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm и 12 cm. Ако от тях избере пръчиците с дължини 8 cm, 10 cm и 12 cm той може да построи триъгълник.

Напишете ОЩЕ три различни възможности за избор на пръчици, с които Павлин може да построи триъгълник.

Отговор. cm, cm и cm
..... cm, cm и cm
..... cm, cm и cm

Съдържателен елемент. Неравенство между страните в триъгълника

Познавателно равнище. Приложение

Измервана математическа компетентност: Моделиране

Дейност. Правене на изводи чрез съпоставяне на данни

Контекст. Индивидуален

Оценяване. три правилни отговора – 3 точки; два правилни отговора – 2 точки; един правилен отговор – 1 и три неправилни или три непосочени отговора – 0 точки.

Резултати. Задачата е решавана от 89% от учениците в съответната извадка (233 от 246 ученици) – тази валидност е близка до оптималния процент. Има среден резултат 1,48 точки, като процентно ненулевите резултати се разпределят така: 20% с 1 точка; 43% с 2 точки и 9% с пълен брой точки. Процентът 0,49 я определя като средна по трудност; има добра дискриминативна сила - 0,34.

Коментар. Задачата измерва умението на ученика да се ориентира в данни и да направи подходящ избор. Без да се променя същността и конструкта на задачата, тя може да се формулира като задача с избираем отговор със следния въпрос: "... Колко още възможности за избор на пръчици има Павлин, за да може да построи триъгълник?" и възможни алтернативи: 2, 3, 5, 6. Тази формулировка обаче, прави задачата по-трудна и по-трудоемка като време – така се изисква да се намерят всички възможности и не се отчита факта, че ученикът може да знае неравенството на триъгълника и реално да може да подбере три необходими дължини (реално практическо задание). И модата и медианата в резултатите по задачата са 2 точки – резултат съпоставим с този от житейска ситуация.

Ето обобщените данни по някои от измерваните математически компетентности:

- (1) Относно **математическото мислене и разсъждаване** –
около 60% умеят да разпознават вида отговори
типично е неразбирането на въпроси, изискващи съпоставяне на данни

- (2) **Относно умение за аргументиране** – само около 25% умеят да приведат верни и пълни математически изчисления в подкрепа на даден извод
още 20% демонстрират умения за излагане на аргументи, но допускат фактически или изчислителни грешки
- (3) **Относно математическата комуникация** – неубедителни резултати относно умения за перефразиране на факти и коментар на твърдения
само 20% показват умения да направят избор на подходящо решение и оптималност при избора на крайния резултат
- (4) **Относно представянето и анализа на ситуация** – значителна част (над 40%) умеят да разграничат различните видове представяния
под 10% се справят с необходимостта от обясняване на целите и различията на тези представяния
- (5) **Относно използването на математически език и формули** – над 70% успяват да представят резултат, използвайки точни математически символи;
само половината от учениците разпознават необходимата им формула за обработка на данните
- (6) **Относно използването на подходящи инструменти и технологии** – почти инцидентно използване на чертожни инструменти, даже и в ситуации, където е указано да се използват
неумения за използване на калкулатори и знания при работа с числа със зададена точност

Доколкото подобно изследване при учениците в този клас е епизодично, то извеждането на окончателни заключения по представянето на учениците върху такъв тип задачи трябва да е предпазливо. Получените резултати са по-скоро отправна точка и насока за ново целеполагане в педагогическите практики и при изготвяне на материали за изследване на компетентностите на учениците.

Методически коментар върху задачи от PISA

В коментарите към някои от задачите от страници 15–36 са определени дейностите, които учениците трябва да извършат, за да приложат необходимото математическо знание за решаване на задачата. В част от тях са предложени естествени развията на ситуацията. Целта на тези авторски допълнения е да се покаже, че тези ситуации могат да бъдат използвани в училище не само за илюстрация, а и в цялостния процес на обучение във всеки клас.

1. ФЕРМИ

Въпрос 1.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическо съдържание. Фигури и тела – лице на квадрат

Коментар на въпроса. Този въпрос изисква от учениците измежду елементите на няколко геометрични тела да изберат само основата на пирамида. Учениците трябва да покажат умения за разчитане на данни по чертеж на двумерен модел. Следва да покажат знания за намиране лице на квадрат с дадена страна (Мерната единица е

дадена в отговора.). Такъв отговор съответства на трето равнище. За грешен отговор и непопълнен отговор кредит не се дава.

Въпрос 2.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическо съдържание. Фигури и тела – средна отсечка в триъгълник

Коментар на въпроса. Този въпрос изисква от учениците от дадената конструкция да отделят само един триъгълник и да определят търсената отсечка като средна отсечка в него. Следва да покажат знания за намиране дължина на средна отсечка в триъгълник. Такъв отговор съответства на трето равнище. Задачата може да се реши и със знания за еднакви триъгълници и успоредник. За грешен и непопълнен отговор кредит не се дава.

Развитие на ситуацията (авторско допълнение)

Въпрос 3.

Селската къща има подпокривно покритие с гладка повърхност. Пресметнете площта на това покритие (с точност до 0,1), ако на покрива има шест капандури с обща площ 7,2 кв. м.

Лицето на покритието е кв. м.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическа съдържание. Фигури и тела – лице на повърхнина на пирамида

Коментар на въпроса. Този въпрос изисква от учениците да приложат теорема на Питагор и да пресметнат височината на равнобедрен триъгълник. От лицето на целия покрив пък трябва да се извади дадената площ за всички капандури, да се пресмята с десетични дроби, като резултатът се закръгли с точност до десети. Доколкото е необходимо да знаят (пресметнат), че $\sqrt{3} \approx 1,73$, то е подходящо учениците да използват калкулатори.

2. ЯБЪЛКОВИ ДРЪВЧЕТА

Въпрос 1.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическа съдържание. Функции и релации – пропорционални зависимости

Коментар на въпроса. Този въпрос изисква от учениците да преброят правилно в чертежите и да проследят изменението на броя на две величини – ябълкови дръвчета и иглолистни дръвчета, и то няколко пъти. Ако правилно преброят дръвчетата от двата вида (т.е. забележат как се променя броят им) в посочените примери, то за последният случай ще може да запишат търсените отговори без да чертаят друга схема. Такъв отговор съответства на четвърто равнище. При един неправилен отговор ученикът получава непълен кредит, съответстващ на трето равнище.

Въпрос 2.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическа съдържание. Функции и релации – решаване на уравнение

Коментар на въпроса. От учениците се изисква по дадените два изрази (формули) за броя на ябълковите и иглолистните дръвчета, да съставят уравнение и да го решат. Уравнението е непълно квадратно с един корен нула. Пълен кредит ученикът получава

и при решаване без уравнение. Това съответства на пето равнище. Кредит не се дава при грешен отговор и грешно решение.

Въпрос 3.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическа съдържание. Функции и релации – сравняване стойности на изрази (решаване на неравенство)

Коментар на въпроса. От учениците се изисква да сравнят стойностите на два израз. Необходимо е да се изследва изменението на произведение, в което единият множител е постоянен, а другият нараства, а също и на произведение, на което и двата множителя нарастват. Задачата може да се реши и с решаване на непълно квадратно неравенство или се обоснове чрез свойствата на съответните функции. Непълнен кредит учениците получават, ако обосноват отговора си с конкретни примери (стойности), или не е представена достатъчно ясно връзката между изменението на стойностите на двата изрази.

3. ИЗРАСТВАНЕ

Въпрос 1.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическа съдържание. Количества – действия с десетични дроби

Коментар на въпроса. Тук не се изисква анализиране на дадената графика, нито да се извлича информация от нея. Този въпрос изисква от учениците да открият зависимост между две величини – при дадено нарастване и краен резултат да открият първоначалната стойност. При правилно формулиране на задача за намиране на неизвестно събираемо и правилно извършване на аритметично действие между две дроби, ученикът получава пълен кредит, като се оценява само крайният резултат. За грешен отговор не се дават точки.

Въпрос 2.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическа съдържание. Вероятности и данни – разчитане на графика

Коментар на въпроса. Тук се изисква от учениците да проследят само едната графика от чертежа – тази за ръста на момчетата. Важна е правилната интерпретация, която може да се предаде с математически понятия или с понятия от ежедневието – „изкачване на кривата”, „темп на израстване” ; „наклон на кривата”; „коефициент на изменение” са ключовите понятия, които трябва да обясняват отговора. Правилното решение на задачата не изисква сравнение между кривите за момчетата и момичетата след 12 години. Не се дават точки за погрешни отговори и при липса на отговор.

Въпрос 3.

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическа съдържание. Вероятности и данни – разчитане на графика

Коментар на въпроса. Учениците следва да сравнят характеристиките на две криви, да ги тълкуват и да направят извод – като е достатъчно да посочат търсеният числов интервал. Необходимо е внимателно да проследят и двете графики – с прекъсната и непрекъсната линия. Отговорите, които получават непълнен брой точки, са тези, в които се посочва, че учениците са на възраст само на 11, или на 12, или 13-годишни, но не се посочва интервала от 11 до 13 години. Тези отговори съответстват на второ равнище от скалата.

4. СКОРОСТ НА СЪСТЕЗАТЕЛЕН АВТОМОБИЛ

Въпрос 1.

Вид на въпроса. Въпрос с избираем отговор

Математическа съдържание. Функции и релации – зависимости между път и скорост

Коментар на въпроса. За да отговорят на този въпрос, учениците трябва да осмислят житейският факт, че най-голяма скорост автомобилът развива на прав участък, да намерят тази част от графиката на скоростта на автомобила, в която скоростта нараства най-много (в правите участъци се кара с по-голяма скорост). След това трябва да направят извод, че този участък е най-дългия праволинеен участък.

Въпрос 2.

Вид на въпроса. Въпрос с избираем отговор

Математическа съдържание. Функции и релации – определяне стойност по графика

Коментар на въпроса. За да отговорят на този въпрос, учениците трябва да посочат тази част от графиката на скоростта на автомобила, в която е най-ниската точка (тя е най-близо да абсцисата) и да направят извод, че там е регистрирана най-ниската скорост през втората обиколка.

5. ОБИРИ

Въпрос 1.

Вид на въпроса. Въпрос с избираем отговор

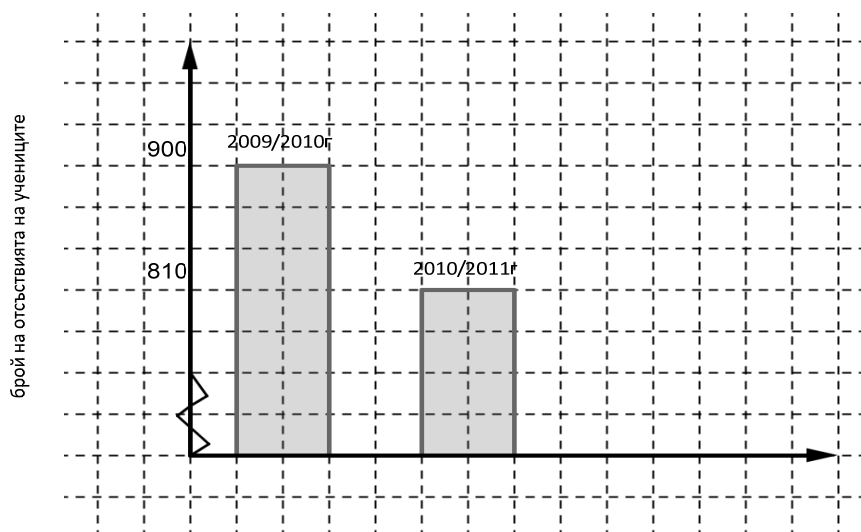
Математическа съдържание. Вероятности и данни – разчитане на стълбова диаграма

Коментар на въпроса. Ключовият момент в източника е диаграмата, в която стойностите по вертикалната ос не започват от 0. За да отговорят на този въпрос аргументирано и правилно, учениците трябва да сравнят обирите през 1998 г. и през 1999 г. и да отчетат, че диаграмата не е правилно интерпретирана, като в отговора се подчертава, че е показана само малка част от нея. Обосновката може да бъде както с математически аргументи (в това число и подходящи изчисления), така и на ежедневен език.

Развитие на ситуацията (авторско допълнение)

5А. ОТСЪСТВИЯ

Диаграмата показва броя на отсъствията на учениците през учебната 2009–2010 г. и през учебната 2010–2011 г.



Това допълнение е свързано със задачи за намиране на част (процент) от число. Анализът на резултатите показва, че проблемът на учениците е не да изразят дадено количество като процент спрямо друго, а да определят спрямо кой брой да изчисляват търсен процент. Двата въпроса разглеждат видовете задачи за определяне на процент. Използвана е диаграма, по която могат да работят с точност (В задачата ОБИРИ също могат да се поставят същите въпроси, но отговорите би трябвало да се изискват с дадена точност или в интервал.).

ВЪПРОС 1.

С колко процента е **намалял броят** на отсъствията през 2010–2011 г. **спрямо** броя на отсъствията през 2009–2010 г.?

- А) около 9%
- Б) 10%
- В) около 11%
- Г) 90%

ВЪПРОС 2:

С колко процента трябва да **се увеличи броят** на отсъствията през 2010/2011 г., за да се получи броят на отсъствията през 2009/2010 г.?

- А) около 9%
- Б) 10%
- В) около 11%
- Г) 90%

Вид на въпроса. Въпрос с избираем отговор

Математическа съдържание. Количества – намиране на процент

Коментар на въпроса. За да отговорят на Въпрос 1. Правилно (отговор Б), учениците първо трябва да сравнят отсъствията през 2009/2010 г. и през 2010/2011 г. и да отчетат разликата (90). След това да разделят на отсъствията **през 2009/2010 г.** и да умножат по 100, или да решат уравнението $900 - x\%900 = 810$. Най-общо, учениците трябва да съставят пропорцията: на 900 бр. – 100%, а на 90 броя – ? %.

Коментар на въпроса. За да отговорят на Въпрос 2. Правилно (отговор В), учениците първо трябва да сравнят отсъствията през 2009/2010 г. и през 2010/2011 г. и да отчетат разликата (90). След това да разделят на отсъствията **през 2010/2011 г.** и полученият резултат да да умножат по 100, или да решат уравнението $900 - x\%900 = 810$). Най-общо, учениците трябва да съставят пропорцията: на 810 бр. – 100%, а на 90 броя – ? %.

6. РЕЗЕРВОАР ЗА ВОДА

Въпрос 1.

Вид на въпроса. Въпрос с избираем отговор

Математическа съдържание. Функции и релации – връзка между време и разстояние (височина на тяло)

Коментар на въпроса. Тук учениците трябва първо да съобразят, че при графиките от А) и Д) промяната на височината на водната повърхност с течение на времето след определен момент остава постоянна, което е невъзможно поради вида на резервоара. Следващите графики, които може да се отхвърлят като невъзможни, отново поради вида на резервоара, са В) и Г) – в началото, когато се пълни конуса, височината ще расте много бързо, а след това доста по-бавно.

Развитие на ситуацията (авторско допълнение)

Въпрос 2.

Резервоарът е пълен с вода догоре. Каква част от цялото количество вода в него се намира в долната конусовидна част? Обяснете отговора си.

.....
.....

Вид на въпроса. Въпрос със свободен отговор

Математическа съдържание. Фигури и тела – обем на цилиндър и на конус

Коментар на въпроса. Основното знание, което се използва тук, е връзката между обемите на конус и цилиндър с равни основи и височини. Правилният отговор $\frac{1}{4}$ (приема се и написан с думи или, ако не е изрично упоменат, но от обяснението си личи крайният резултат). Освен с математически изчисления отговорът може да се обоснове и така: „Обемът на конуса е три пъти по-малък от този на цилиндъра, следователно от целия резервоар е 4 пъти по-малък.”

