

LVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 19 април 2008 г.

ТЕМА ЗА 4 КЛАС

Задача 1. Николай много обича математиката, но не обича да чете. Когато му подарили книга за рождения ден, той вместо да я чете първо забелязал, че номерацията на книгата започва от страница 3 и пресметнал, че за номериране на всички страници са използвани 2008 цифри. Намерете:

- а) колко страници има новата книга на Николай;
- б) колко пъти е използвана цифрата 7 за номериране на страниците.

Решение: а) Пресмятаме последователно, че за едноцифрените числа са необходими 7 цифри, за двуцифрените $90 \cdot 2 = 180$ цифри, а останалите $2008 - 187 = 1821$ цифри са за $1821 : 3 = 607$ трицифрени числа. Следователно книгата има $607 + 90 + 9 = 706$ страници.

б) В едноцифрените числа цифрата 7 се среща един път. В двуцифрените тя се среща 10 пъти като цифра на десетици и 9 пъти като цифра на единици или общо 19 пъти. Във всяка стотица (от една до шест) цифрата 7 се среща отново по 10 пъти като цифра на десетици и 10 пъти като цифра на единици, т.е. общо 20 пъти. В числата от 700 до 706 тя е 7 пъти цифра на стотиците. За общия брой получаваме $20 \cdot 7 + 7 = 147$.

Задача 2. Дължината на правоъгълник в сантиметри е двуцифрено число с различни цифри, а ширината му е число, огледално на дължината. (Да припомним, че огледално на едно число наричаме число, записано със същите цифри, но в обратен ред.) Обиколката на правоъгълника е 154 см.

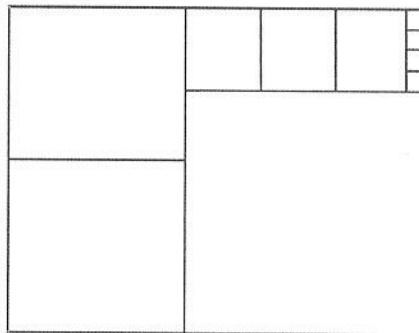
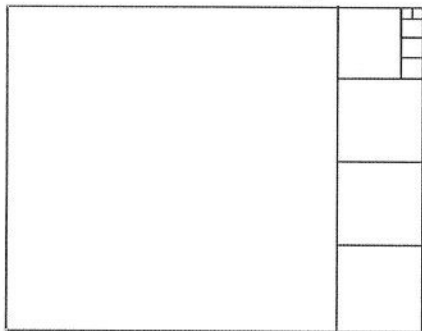
- а) Намерете лицето на правоъгълника.

б) Ако правоъгълникът е с възможно най-голямо лице, покажете как може да бъде разрязан на точно 10 квадрата (не непременно различни). Намерете две различни такива разрязания.

Решение: Да означим страните на правоъгълника с \overline{xy} и \overline{yx} . Съставяме ребуса $2(\overline{xy} + \overline{yx}) = 154$ и от десетичния запис получаваме диофантовото уравнение $11x + 11y = 77$. Отгук намираме три възможности за страните: 61 и 16, 52 и 25, 43 и 34.

а) За съответните лица получаваме $S_1 = 61 \cdot 16 = 976$ кв.см, $S_2 = 52 \cdot 25 = 1300$ кв.см и $S_3 = 43 \cdot 34 = 1462$ кв.см.

б) От а) следва, че най-голямо лице има правоъгълникът с размери 43×34 . Ето два начина за разрязването му на 10 квадрата: на първата фигура имаме един квадрат 34×34 , три – 9×9 , един – 7×7 , три – 2×2 и два – 1×1 ; на втората фигура имаме един квадрат 26×26 , два – 17×17 , три – 8×8 и четири – 2×2 .



Задача 3. За да направи 5 големи и 7 малки торти, на един сладкар са му необходими 4 часа и 36 минути. Ако за направата на една голяма торта са необходими 12 минути повече отколкото за направата на една малка торта, то за колко време този сладкар ще изпълни поръчка за 4 големи и 2 малки торти?

Решение: 4 часа и 36 минути са равни на 276 минути. Изработването на една голяма торта "забавя" сладкаря с 12 минути. Значи, ако вместо 5 големи и 7 малки той правеше 5 малки и 7 малки (т.е. общо 12 малки торти), щеше да свърши $5 \cdot 12 = 60$ минути по-рано, т.е. за 216 минути. Отгук следва, че една малка торта се прави за $216 : 12 = 18$ минути, а една голяма – за 30 минути. Тогава за поръчката са необходими $4 \cdot 30 + 2 \cdot 18 = 156$ минути, които се равняват на 2 часа и 36 минути.

Критерии за оценяване:

Задача 1. Общо 7 т., от които: 4 т. за а) и 3 т. за б). В а) 1 т. за пресмятане броя на цифрите на едноцифрените и двуцифрените числа, 2 т. за броя на цифрите на трицифрените числа и 1 т. за броя на страниците. В б) 1 т. за разсъдението, че във всяка стотица има 20 седмици, 1 т. за броя на стотиците и 1 т. за общия брой седмици.

Задача 2. Общо 7 т., от които: 4 т. за а) и 3 т. за б). В а) 1 т. за съставяне на ребуса и по 1 т. за намиране на всяко от трите лица. В б) 1 т. за намиране на едно разрязване и общо 3 т. за две разрязвания (2 т., ако е разрязван друг правоъгълник).

Задача 3. Общо 7 т., от които: 1 т. за превръщането на часовете в минути, 4 т. за намиране на необходимото време за една малка торта, 1 т. за времето за една голяма торта и 1 т. за общото време на поръчката.

Забележка. Посочените критерии са примерни и съответстват на предложените от Националната комисия решения. При наличие на алтернативни решения всяка Областна комисия изготвя свои критерии за оценяването им, като се съобразява с предложените.